Étude d'une fonction et d'une suite

Méthode de Héron et approximation de $\sqrt{2}$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

PARTIE A – Étude de la fonction

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{2x^2}.$$

3. Étudier le signe de $f'(x)$, puis dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

4. En déduire que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) \geqslant \sqrt{2}.$$

5. Calculer la dérivée seconde $f''(x)$, puis étudier la convexité de la fonction f sur son ensemble de définition.

6. Montrer que l'équation :

$$f(x) = \frac{3}{2}$$

admet exactement deux solutions sur $]0;+\infty[$.

7. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = x$.

PARTIE B – Étude d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\boxed{\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.}$$

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$u_n \geqslant \sqrt{2}.$$

3. Montrer que, pour tout réel $x > 0$:

$$f(x) - x = \frac{2 - x^2}{2x}.$$

4. En déduire que la suite (u_n) est strictement décroissante.

5. Justifier que la suite (u_n) est convergente.

6. On note ℓ sa limite.

a) Justifier que $\ell \geqslant \sqrt{2}$.

b) En utilisant la relation de récurrence et la continuité de la fonction f, montrer que :

$$\ell = f(\ell).$$

c) En déduire la valeur exacte de ℓ.

7. On souhaite maintenant étudier la rapidité de convergence de la suite vers $\sqrt{2}$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{u_{n+1} - \sqrt{2} = \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}.}$$

b) En déduire que :

$$0 \leqslant u_{n+1} - \sqrt{2} \leqslant \frac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}.$$

c) Expliquer pourquoi cette dernière inégalité permet d'affirmer que la suite converge très rapidement vers $\sqrt{2}$.

La méthode de Héron : une méthode pour approcher une racine carrée